انواع روش‌های محاسبه‌ی نیرو در تحلیل جریان حول یک استوانه توسط روش شبکه‌ی بولتزمن*

(یادداشت پژوهشی)

مینا علاف‌زاده[۱] شهرام طالبی[۲]

چکیده *روش شبکه‌ی بولتزمن با توجه به سادگی الگوریتم و دیگر مزایای آن، در چند دهه‌ی اخیر به‌عنوان یکی از روش‌های موفق در دینامیک سیالات محاسباتی به‌کار گرفته شده است. در این مقاله از این روش برای شبیه‌سازی عددی جریان حول یک استوانه استفاده شده است. برای بررسی نحوه‌ی عملکرد روش شبکه‌ی بولتزمن در شبیه‌سازی سطوح منحنی، از روش‌های تبادل ممنتم، تبادل ممنتم بر سطح استوانه، انتگرال‌گیری تنش سطح و محاسبه‌ی تنش از طریق مؤلفه‌ی سرعت برای محاسبه‌ی ضریب درگ استفاده شده است و نتایج حاصل با نتایج به‌دست آمده از فرمول‌های تجربی مقایسه گردیده است. نتایج به‌دست‌آمده حاکی از توانایی روش شبکه‌ی بولتزمن در شبیه‌سازی سطوح منحنی است.*

واژه‌های کلیدی تبادل ممنتم، ضریب درگ، روش شبکه‌ی بولتزمن، انتگرال‌گیری تنش سطح.

Different Methods to Compute Force over a Cylinder by LBM

M. Alafzadeh Sh. Talebi

Abstract *In according to the simplicity of the lattice Boltzmann method's(LBM) algorithm and its benefits, it has been used as a successful method in computational fluid dynamics in the last decades. In this paper, LBM was used to simulate the flow over a cylinder. To analyze the application of LBM in simulation curved surface, different methods to compute drag coefficient were used. These methods are: momentum exchange, momentum exchange on the wall, stress integration, computing stress by velocity components. The result shows the ability of Lattice Boltzmann method to simulate curved surface.*

Key Words Momentum exchange, Drag coefficient, Lattice Boltzmann method, Stress integration.

---

* تاریخ دریافت مقاله ۹۰/۵/۳۱ و تاریخ پذیرش آن ۹۱/۱۲/۲۳ می‌باشد.

(۱) نویسنده‌ی مسؤول: دانشجوی دکترا، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان.

(۲) استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مکانیک، دانشگاه یزد.

مقدمه

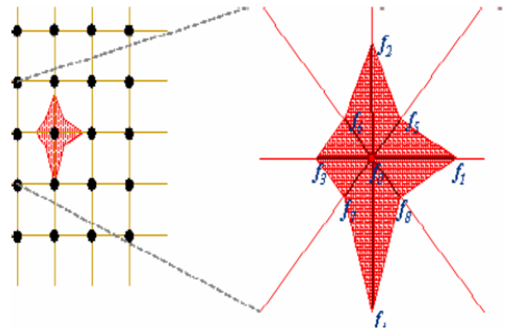
معادله‌ی بولتزمن که توسط لودویگ بولتزمن ارائه شد، در واقع سنگ زیرین تئوری جنبشی (Kinetic theory) است. اگرچه این معادله ابتدا برای سیستم گازهای رقیق به‌دست آمد ولی خیلی زود توانست در شاخه‌های مختلف مورد استفاده قرار گیرد. سپس روش شبکه‌ی بولتزمن (Lattice Boltzmann method) که در واقع ویرایش شده‌ی معادله‌ی بولتزمن در فضای گسسته است، به‌وجود آمد. این روش، یکی از ابزارهای به‌روز و مؤثر در زمینه‌ی بررسی عددی پدیده‌هاست که محدودیت پیوستگی جریان بر آن اعمال نمی‌شود [1]. با توجه به ماهیت روش شبکه‌ی بولتزمن، تمام محاسبات به‌صورت صریح صورت می‌گیرد. به همین دلیل قابلیت موازی‌سازی در این روش بسیار بالا است و یکی از مزایای این روش به حساب می‌آید. هم‌چنین این روش برای مدل‌سازی شرایط مرزی پیچیده، جریان‌های ریز مقیاس و دینامیک فصل مشترک مناسب است. سوکوپ و تورن [1] شرایط مرزی و روابط حاکم در روش شبکه‌ی بولتزمن را به تفصیل بیان کرده‌اند. حل جریان حول استوانه‌ی آزاد، یکی از مسائل بنیادی در دینامیک سیالات محاسباتی است. کائو و یانگ [2] به بررسی جریان حول یک مربع ثابت و سپس یک مربع و استوانه‌ی متحرک داخل جریان توسط روش شبکه‌ی بولتزمن پرداخته‌اند. دوپیوس و همکارانش [3] از روش شبکه‌ی بولتزمن برای تحلیل جریان غیرقابل‌تراکم و غیردائم عبوری از روی یک استوانه، استفاده کرده‌اند. لطفی و همکارانش [٤] از روش شبکه‌ی بولتزمن جهت بررسی جریان حول یک مانع مربعی داخل کانال استفاده کرده‌اند. اشرفی‌زاده و پایمرد [٥] با افزودن یک شرط مرزی مناسب برای مرزهای منحنی، توانایی روش شبکه‌ی بولتزمن را افزایش داده‌اند. هم‌چنین آن‌ها توانسته‌اند امکان حل جریان‌های تراکم‌پذیر فوق‌صوت را بر اجسام واقعی نظیر ایرفویل فراهم آورند. یادآور می‌شود که در اکثر مقالات بیان‌شده از روش تبادل ممنتم برای محاسبه‌ی نیرو استفاده شده است.

در این مقاله با شبیه‌سازی جریان حول یک استوانه‌ی آزاد و محاسبه‌ی ضریب درگ، توسط روش‌های مختلف محاسبه‌ی نیرو در این روش، توانایی روش شبکه‌ی بولتزمن در تحلیل جریان حول سطوح منحنی، به‌خوبی نمایش داده شده است. هم‌چنین با استفاده از تعیین طول گردابه، مؤلفه‌ی افقی سرعت و تنش سطح در مقایسه با نتایج روش‌های عددی معتبر، دقت روش شبکه‌ی بولتزمن در تحلیل جریان حول سطوح منحنی به تصویر کشیده شده است. در ادامه پس از مروری بر تئوری و مبانی اصلی روش شبکه‌ی بولتزمن به شرح هندسه و ابعاد مسأله و شرایط مرزی مورد نظر پرداخته شده است و در آخر نتایج حاصل از حل عددی جریان حول یک استوانه آزاد توسط روش شبکه‌ی بولتزمن و مقایسه‌ی آن با نتایج تجربی و عددی معتبر ارائه گردیده است.

مبانی روش شبکه‌ی بولتزمن

اگرچه روش شبکه‌ی بولتزمن مستقیماً از روش شبکه‌ی گاز (Lattice-gas) منشأ گرفته است ولی هی و لو [6] نشان دادند که می‌توان معادله‌ی شبکه‌ی بولتزمن را به‌صورت مستقیم از معادله‌ی پیوسته‌ی بولتزمن به‌دست آورد. در اصل روش شبکه‌ی بولتزمن، طرحی با سرعت‌های گسسته از معادله‌ی بولتزمن است. به‌این‌ترتیب استقلال معادله‌ی شبکه‌ی بولتزمن از شبکه‌ی گاز، به‌صورت تئوری نشان داده شده است. بنیادی‌ترین مفهومی که این روش بر پایه‌ی آن بنا نهاده می‌شود، با پاسخ دادن به این سؤال شکل می‌گیرد که احتمال پیدا کردن یک ذره، اطراف موقعیت $\vec{x}$ در زمان t با ممنتم $\vec{P}$ چقدر است؟

در پاسخ به این سؤال تابع چگالی احتمال (Probability density function) یک تابع توزیع (Distribution function) معرفی می‌شود. در شکل (۱) می‌توان مفهوم تابع توزیع را به‌تر مشاهده کرد.



شکل ۱ ابر میکروسکوپی تابع توزیع ذره [1]

در سال ۱۸۷۲ لودویگ بولتزمن معادله‌ای برای توصیف تغییرات تابع توزیع تک‌ذره‌ای ارائه داد که به افتخار او معادله‌ی بولتزمن نامیده شده است [1].

$$\partial_t f + (\vec{\xi}.\nabla)f = \Omega(f) \qquad (۱)$$

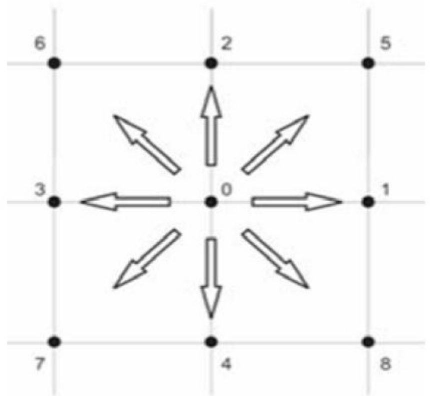
که $f(\vec{x},\vec{\xi},t)$ تابع توزیع تک‌ذره، $\vec{\xi}$ میدان سرعت و Ω جمله‌ی بیانگر برخورد بین ذرات است. متغیرهای ماکروسکوپی مانند چگالی و سرعت از ممان‌های تابع توزیع به‌دست می‌آیند [1]:

$$\frac{P}{c_s^2} = \int f d\vec{\xi} \qquad \frac{P}{c_s^2}\vec{u} = \int \vec{\xi} f d\vec{\xi} \qquad (۲)$$

c_s سرعت صوت و P فشار است. جمله‌ی برخورد با استفاده از تقریب BGK (- Bhatnager Gross-Krook) به شکل زیر خطی می‌شود [1]:

$$\Omega(f) = -\frac{1}{\tau}(f - f^{eq}) \qquad (۳)$$

که τ زمان آسودگی (Relaxation time) و f^{eq} تابع توزیع تعادلی ماکسول- بولتزمن است. برای گسسته‌سازی می‌توان از شبکه‌های مختلف استفاده کرد. شبکه‌ی معمول در حالت دوبعدی D_2Q_9 است که در شکل (۲) مشاهده می‌شود.



شکل ۲ شبکه D_2Q_9

در این نوع شبکه، ذره‌ی موجود در گره می‌تواند در ۸ مسیر (لینک) حرکت کند. به‌این‌ترتیب، در روش شبکه‌ی بولتزمن محیط پیوسته‌ی سیال به صورت مجموعه‌ای از ذرات مجازی مدل شده است که حرکت و برخورد آن‌ها بر روی مسیرهای مشخصی (شبکه‌ی بولتزمن) بیان می‌شود و تغییرات تابع توزیع با استفاده از معادله‌ی گسسته‌ی بولتزمن تعیین می‌گردد. یادآور می‌شود که با در نظر گرفتن $c = \delta x / \delta t$ که در آن δx و δt به‌ترتیب گام مکانی و زمانی شبکه است، در تمام مراحل حل $\delta x = \delta t = 1$ در نظر گرفته می‌شود. معادله‌ی بولتزمن عبارت است از [1]:

$$f_i(\vec{x}+\vec{e}_i,t+1) - f_i(\vec{x},t) = -\frac{1}{\tau}\left[f_i(\vec{x},t) - f_i^{eq}(\vec{x},t)\right]$$
$$\vec{e}_0 = (0,0)$$
$$\text{for} \quad i=1,2,3,4 \quad \vec{e}_i = c\left(\cos\frac{(i-1)\pi}{2}, \sin\frac{(i-1)\pi}{2}\right)$$
$$\text{for} \quad i=5,6,7,8 \quad \vec{e}_i = c\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{(i-5)\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{(i-5)\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right) \qquad (۴)$$

که f_i^{eq} تابع توزیع تعادلی و $\vec{e}_i$ بیانگر بردار سرعت در راستای لینک‌ها است، اندیس i بیانگر هر گره در شبکه است. می‌توان نشان داد در این حالت [1]:

$$f_i^{eq} = \rho\omega_i\left[1+\frac{3(\vec{e}_k.\vec{u})}{c^2}+\frac{9(\vec{e}_k.\vec{u})^2}{2c^4}-\frac{3|\vec{u}|^2}{2c^2}\right] \qquad (٥)$$

$$\begin{cases}\omega_0 = 4/9, \omega_1=\omega_2=\omega_3=\omega_4=1/9\\ \omega_5=\omega_6=\omega_7=\omega_8=1/36\end{cases}$$

متغیرهای اصلی جریان و زمان آسودگی در واحد شبکه با استفاده از روابط زیر به‌دست می‌آیند [1]:

$$\rho = \sum_{i=0}^{8} f_i \quad \bar{u} = \frac{1}{\rho}\sum_{i=0}^{8} f_i\bar{e}_i \quad \nu = \frac{1}{3}\left(\tau-\frac{1}{2}\right) \qquad (٦)$$

و معادله‌ی حالت به‌کار رفته عبارت است از [1]:

$$\rho c_s^2 = P \qquad (٧)$$

یادآور می‌شود که برای حل رابطه‌ی (٤) از دو مرحله استفاده می‌شود، نخست تأثیر جمله‌ی سمت راست معادله‌ی (مرحله‌ی برخورد) و سپس تأثیر میدان سرعت اعمال می‌گردد (مرحله‌ی جاری شدن)؛ یعنی از نظر ریاضی معادله‌ی (٤) به‌صورت گام‌های زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}&\tilde{f}_i(x,t+\delta t) = \frac{1}{\tau}\left[f_i^{eq}(x,t)-f_i(x,t)\right]+f_i(x,t)\\ &f_i(x+\delta t e_i, t+\delta t) = \tilde{f}_i(x,t)\end{aligned} \qquad (٨)$$

$\tilde{f}_i$ تابع توزیع پس از برخورد است.

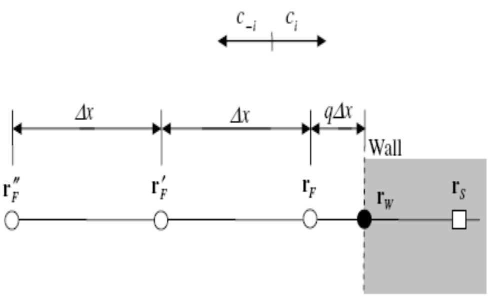
شرایط مرزی

بسیاری از مسائل دینامیک سیالات نیاز به شرایط مرزی فیزیکی دارند. در واقع در هر روش که برای شبیه‌سازی استفاده کنیم، معمولاً به معادلات دیفرانسیل پاره‌ای می‌رسیم که برای حل آن‌ها بسته به مرتبه‌ی معادله دیفرانسیل به شرایط مرزی نیاز داریم که این شرایط مرزی می‌توانند مکانی و یا زمانی باشند. اعمال شرایط مرزی در روش شبکه‌ی بولتزمن به‌خصوص برای مرز منحنی از پیچیدگی خاصی برخوردار است. علت این است که در این روش متغیرهایی مانند فشار، دما یا سرعت جزو متغیرهای اصلی مسأله نیست. متغیر اصلی که روابط بر حسب آن نوشته می‌شوند، تابع توزیع می‌باشد. در شرایط مرزی شبکه‌ی بولتزمن کار اصلی تبدیل این متغیرها به توابع توزیع می‌باشد. برای سطوح باز معمولاً از شرط مرزی زو-هی استفاده می‌شود [7]. با توجه به این‌که روی یک مرز مقدار سه تابع توزیع و فشار مجهول است، در این روش می‌توان با نوشتن رابطه‌ی بین توابع توزیع با فشار و مؤلفه‌های سرعت و هم‌چنین شرط بازگشت به عقب (Bounce back) در راستای عمود، مجهولات را به‌دست آورد؛ به‌عنوان مثال برای یک مرز جنوبی که f_2، f_5 و f_6 مجهول هستند، چهار معادله‌ی مورد استفاده عبارت‌اند از [8]:

$$\begin{aligned}&\frac{P}{c_s^2} = \sum_i f_i\\ &\frac{P}{c_s^2}U_0 = f_1 - f_3 + f_5 - f_6 - f_7 + f_8\\ &\frac{P}{c_s^2}V_0 = f_2 - f_4 + f_5 + f_6 - f_7 - f_8\\ &f_2 - f_2^{eq} = f_4 - f_4^{eq}\end{aligned} \qquad (٩)$$

که U_0 و V_0 سرعت‌های روی مرز هستند. با حل این چهار معادله، مجهولات مورد نظر به‌دست می‌آیند [8]:

$$\begin{aligned}&P = \frac{c_s^2}{1-V_0}\left[f_0+f_1+f_3+2(f_4+f_7+f_8)\right]\\ &f_2 = f_4 + \frac{2\rho V_0}{3}\\ &f_5 = f_7 - 0.5(f_1-f_3)+\frac{\rho U_0}{2}+\frac{\rho V_0}{6}\\ &f_6 = f_8 + 0.5(f_1-f_3)-\frac{\rho U_0}{2}+\frac{\rho V_0}{6}\end{aligned} \qquad (١٠)$$



شکل ۳ نمایش مدل‌سازی مرز منحنی در روش‌های مبتنی بر درون‌یابی

برای اعمال سطوح منحنی، شرایط مرزی متفاوتی وجود دارد که یکی از روش‌های دقیق در این زمینه روش بوزیدی (Bouzidi) مرتبه دو است [8]. از ترکیب میان یابی درجه دوم و شرط مرزی بازگشت به عقب، بوزیدی و همکارانش [9] روشی جدید برای مدل‌سازی سطوح خمیده ارائه دادند. بر طبق این روش $\tilde{f}_{-i}(r_S,t)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\tilde{f}_{-i}(r_S,t)=q(1+2q).\tilde{f}_i(r_F,t)+(1-4q^2)\tilde{f}_i(r'_F,t)\\
&-q(1-2q)\tilde{f}_i(r''_F,t) \qquad q<\frac{1}{2}\\
&\tilde{f}_{-i}(r_S,t)=\frac{1}{q(2q+1)}\begin{bmatrix}\tilde{f}_i(r_F t)-(1-4q^2)\tilde{f}_{-i}(r_F,t)\\ +q(1-2q)\tilde{f}_{-i}(r'_F,t)\end{bmatrix}\\
&q\geq\frac{1}{2}\\
&q=\frac{|r_F-r_W|}{|r_F-r_S|}=\frac{|r_F-r_W|}{\Delta x} \qquad 0<q\leq 1
\end{aligned} \tag{۱۱}$$

که $\tilde{f}_{-i}(r_S,t)$ تابع توزیع پس از برخورد است. در این روش‌ها، ابتدا با در نظر گرفتن گره r_s داخل سطح جامد، گره r_w بر روی مرز، گره r_F به‌عنوان اولین گره در سیال نزدیک مرز و r'_F و r''_F به‌عنوان گره‌های بعدی در سیال (شکل ۳)، پارامتر جدیدی با عنوان q تعریف می‌شود. همان‌طور که مشخص است مجهول مورد نظر، تابع توزیع برخورد گره r_s، است. (باید در نظر داشت که C-i=-Ci است که نشان‌دهنده‌ی جهت حرکت تابع توزیع برخورد گره r_F پس از برخورد با مرز است). برای تعیین این مقدار، می‌توان از فرمول (۱۱) استفاده کرد. از جمله مزایای این روش صریح بودن و کاربرد ساده‌ی آن است.

محاسبه‌ی نیرو

برای محاسبه‌ی نیروی وارد بر جسم جامد (که شامل نیروی درگ و برآ است)، می‌توان از روش‌های مختلف در روش شبکه‌ی بولتزمن استفاده کرد. فیلیپووا و هانل [7] برای محاسبه‌ی نیروی هیدرودینامیکی وارد بر جسم از رابطه‌ی انتگرال تنش استفاده کردند، آن‌ها برای محاسبه‌ی تانسور تنش از مقادیر غیر تعادلی تابع توزیع بر اساس رابطه‌ی زیر عمل نمودند [7]:

$$\tau_{ij}=\left(1-\frac{1}{2\tau}\right)\sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(neq)}(x,t)\left(e_{\alpha,i}e_{\alpha,j}-\frac{1}{D}e_{\alpha}.e_{\alpha}\delta_{ij}\right) \tag{۱۲}$$

D برای حالت دو بعدی برابر ۲ است. f_{α}^{neq} بخش غیر تعادلی تابع توزیع احتمال است [7]:

$$f_{\alpha}^{neq}=f_{\alpha}(x,t)-f_{\alpha}^{eq}(x,t) \tag{۱۳}$$

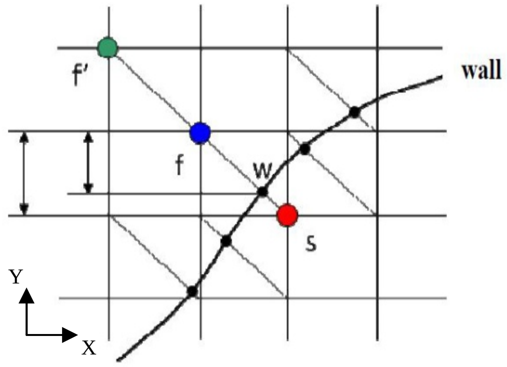
روش انتگرال‌گیری تنش سطح (Stress integration)، سادگی ذاتی روش شبکه‌ی بولتزمن را از بین می‌برد و حجم محاسبات زیادی دارد، بنابراین روش تبادل ممنتم (Momentum exchange) ارائه شد. در این روش، فرض بر آن است که طی برخورد ذره‌ی سیال با دیواره، نیرویی برابر و در خلاف جهت نیروی فوق به دیواره‌ی جسم وارد می‌شود. کل نیروی وارد بر جسم، برابر مجموع برداری نیروهای ناشی از برخورد ذرات سیال با نقاط مختلف سطح است [7]:

$$F=\sum_{allx_s}\sum_{\alpha\neq 0}e_\alpha\left[\tilde{f}_\alpha(x_s,t)+\tilde{f}_{\bar{\alpha}}(x_f,t)\right]$$

$$\times\left[1-\omega(x_f)\right]\times\frac{\delta\forall}{\delta t} \qquad (۱٤)$$

$$\omega(x_f)=\begin{cases}0 & \text{in solid body}\\ 1 & \text{out of body}\end{cases}$$

در ایـن رابطـه $\tilde{f}_\alpha$ تـابع توزیـع تعـادلی پـس از برخورد است، x_s و x_f به ترتیب، گره جامد و اولین گره سیال نزدیک مـرز جامـد هسـتند (شـکل ٤)، $\delta\forall$ حجم یک سلول و $\bar{\alpha}$ جهت عکس α است.



شکل ٤ شماتیکی از گره جسم جامد و گره‌های سیال همسایه

یادآور می‌شود کـه در مقـالات [2, 7, 9] تنهـا بـه مقایسه‌ی دو روش انتگرال‌گیری تـنش سـطح و تبـادل ممنتم پرداخته‌اند، در حالی که در این مقاله برای اولـین بار علاوه بر روش‌های تبـادل ممنـتم و انتگـرال‌گیـری تــنش ســطح، از روش تبــادل ممنــتم روی ســطح و هم‌چنین محاسبه‌ی نیرو به‌کمک تـنش برشـی و روش حجم محدود نیز استفاده شـده اسـت. در روش تبـادل ممنتم روی سطح (روش سوم)، ابتدا توابع توزیع روی سطح استوانه تعیین می‌گردد، برای این کار مـی‌تـوان از روش میان‌یابی بین گره‌هـای داخـل و خـارج اسـتوانه استفاده نمود. سپس از طریق توابع توزیع کـه مسـتقیماً برروی سطح محاسبه شده‌انـد، مـی‌تـوان روش تبـادل ممنتم (که قبلاً بیان شده است) را به‌کار بـرد و نیـرو را محاسبه کرد، در حالی‌که در روش تبادل ممنتم از توابع توزیع گره‌های همسایه برای محاسـبه‌ی نیـرو اسـتفاده می‌شود. در روش چهارم می‌توان بـا اسـتفاده از تعیـین مؤلفه‌های سرعت در نزدیکی سطح استوانه ابتـدا تـنش برشی وارد بر سطح استوانه را از معادلـه زیـر محاسـبه نمود [10]:

$$\tau=\mu\,\partial u/\partial y \qquad (۱۵)$$

سپس با توجه به ارتباط نیروی وارد بـر سـطح بـا تنش برشی و فشار [10]:

$$F=\int_{\text{on boundary}} dA\hat{n}.\left\{-PI+\rho\nu\left[\left(\nabla\vec{u}\right)+\left(\nabla\vec{u}\right)^T\right]\right\} \qquad (۱٦)$$

می‌توان نیروی وارد بر سطح را به‌دست آورد.

یکـی از پارامترهـای مهـم بـرای مقایسـه‌ی نتـایج به‌دست آمده در تحلیل جریان حـول اسـتوانه، ضـریب درگ است. ضریب درگ به‌صورت زیر بیـان مـی‌شـود [10]:

$$C_D=\frac{F_x}{1/2\rho U^2 A} \qquad (۱۷)$$

در این رابطه F_x مؤلفه‌ی نیروی وارد بر استوانه از جانب سیال در راسـتای x و A سـطح تصـویر شـده‌ی استوانه در مقابل جریان است.

یادآور مـی‌شـود کـه جهـت نمـایش دقـت نتـایج به‌دست آمده از تنش سطح نیز استفاده شده اسـت کـه رابطه‌ی $\tau_{r\theta}$ با تنش‌های سطحی در مختصات کارتزین (پس از تصویر کردن مؤلفه‌ها) عبارت است از [10]:

$$\tau_{r\theta}=\frac{-1}{2}\left(\tau_{xx}-\tau_{yy}\right)\sin 2\theta+\tau_{xy}\cos 2\theta \qquad (۱۸)$$

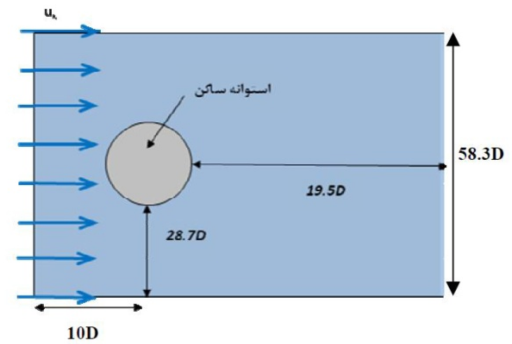
طرح مسأله

در این مقاله جریان حول یک استوانه در جریان آزاد توسط روش شبکه‌ی بولتزمن تحلیل شده است. ابعاد شبکه در شکل (۵) نشان داده شده است. برای این ابعاد از مش‌بندی 700×360 استفاده شده است در حالی‌که استوانه مورد نظر با ۱۲ گره طولی و عرضی محصور گردیده است (این انتخاب با توجه به وابستگی حل به ابعاد شبکه صورت گرفته است). یادآور می‌شود که به‌منظور پایداری روش شبکه‌ی بولتزمن زمان آسودگی بزرگ‌تر از ۰/۵ در نظر گرفته شده است.

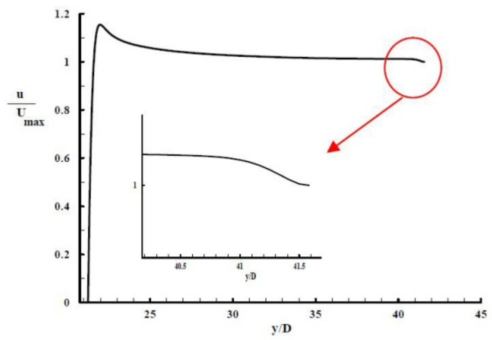
برای مشاهده‌ی علت انتخاب این شبکه می‌توان به شکل (٦) مراجعه کرد. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود، در صورت انتخاب مش‌بندی 500×360، نمی‌توان شرط مرز دوردست را به‌خوبی اجرا نمود و تغییرات سرعت در راستای عمود بر مرز دوردست صفر نخواهد بود. یادآور می‌شود که پس از بررسی ابعاد ریزتر، تغییری در نتایج حاصل ایجاد نشد، به‌همین دلیل از مش‌بندی 700×360 در این شبیه‌سازی استفاده شده است.

عدد رینولدز به‌صورت $Re = UD / \nu$ تعریف شده است که U سرعت ورودی جریان و ν لزجت سیال و D قطر استوانه است. ورودی با فرض مشخص بودن سرعت ورودی، خروجی با فرض فشار معلوم، مرز دوردست بالایی با فرض ناچیز بودن تغییرات مؤلفه‌های سرعت در جهت عمودی و مرز پایین به‌علت تقارن استوانه مورد نظر، مرز تقارن در نظر گرفته شده است.

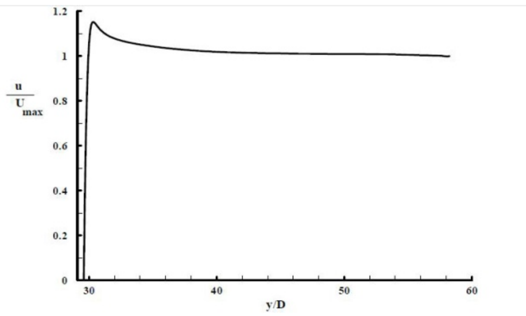
برای اعمال این شرایط در روش شبکه‌ی بولتزمن از روش زو و هی استفاده شده است. برای اعمال شرط عدم لغزش بر روی جسم جامد از روش بوزیدی مرتبه‌ی ۲ [8] (به‌دلیل دقت بالای این روش)، استفاده شده است.



شکل ۵ شماتیکی از جریان حول یک استوانه آزاد



الف) مؤلفه‌ی افقی جریان در راستای خط عمودی عبوری از مرکز استوانه برای ابعاد ۵۰۰×۳٦۰

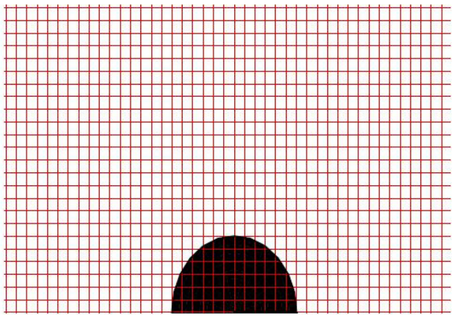


ب) مؤلفه‌ی افقی جریان در راستای خط عمودی عبوری از مرکز استوانه برای ابعاد ۷۰۰×۳٦۰

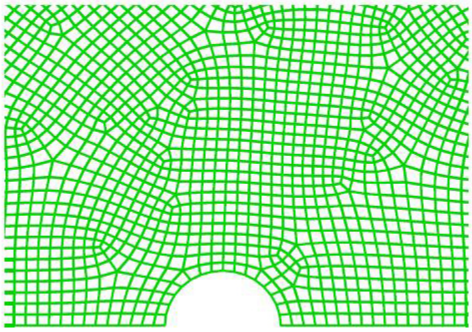
شکل ٦ بررسی تاثیر افزایش مش‌بندی بر نتایج

یادآور می‌شود که به‌منظور معتبرسازی نتایج به‌دست‌آمده، از روش حجم محدود توسط نرم‌افزار فلوئنت استفاده شده است. تعداد سلول‌های به‌کار رفته در روش حجم محدود ۲۸۰۰۰۰ سلول است که با

تعداد مش‌بندی در شبکه‌ی بولتزمن تقریباً مطابقت دارد. برای مشاهده‌ی نحوه‌ی مش‌بندی نزدیک سطح استوانه در روش حجم محدود در مقایسه با روش شبکه‌ی بولتزمن می‌توان به شکل (۷) مراجعه کرد. با توجه به شکل تعداد سلول در نزدیک جسم جامد، در دو روش یکسان است.



الف) روش شبکه‌ی بولتزمن



ب)روش حجم محدود

شکل ۷ مش‌بندی استوانه‌ی آزاد در روش حجم محدود و شبکه‌ی بولتزمن برای Re=20

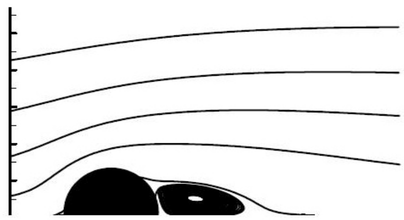
بررسی نتایج

پس از محاسبه‌ی نیرو از طریق چهار روش بیان شده، ضریب درگ در جریان حول استوانه در جریان آزاد برای Re=20 در جدول (۱) در مقایسه با نتایج تجربی [10] و عددی بیان گردیده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، روش تبادل ممنتم هم‌خوانی به‌تری با نتایج تجربی، در مقایسه با روش‌های دیگر دارد. این مطلب حاکی از آن است که روش تبادل ممنتم، نه تنها از لحاظ کاربرد ساده است بلکه از دقت مناسبی در محاسبه‌ی نیرو برخوردار است. به‌همین دلیل در اکثر مقالات چاپ شده در این زمینه، از روش تبادل ممنتم برای محاسبه‌ی نیرو استفاده شده است. یادآور می‌شود که در Re=20 نتایج تئوری (مثل نتایج تئوری برای رینولدزهای پایین در جریان خزشی) وجود ندارد، بنابراین نتایج تجربی موجود، وسیله‌ی مناسبی برای سنجش دقت محسوب می‌شوند [10].

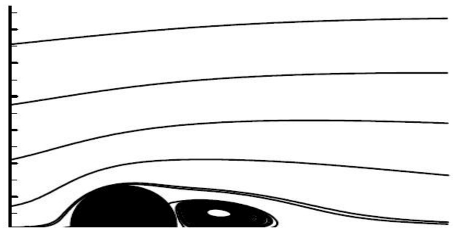
جدول ۱ ضریب درگ برای جریان حول استوانه آزاد در Re=20

ضریب درگ	روش
۲/۱	تبادل ممنتم روی گره‌های همسایه مرز
۱/۹۸	تبادل ممنتم روی سطح (روش سوم)
۲/٦	انتگرالگیری تنش سطح
۲/۸	روش چهارم، رابطه‌ی (۱۵)
۲/۱۵۸	حجم محدود
۲/۳۵۵	فرمول تجربی ۱ [10]
۲/۰۷	فرمول تجربی ۲ [10]

برای بررسی بیش‌تر، در شکل (۸) خطوط جریان حول استوانه آزاد در Re=20 در مقایسه با نتایج به‌دست آمده از روش حجم محدود نمایش داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نتایج حاصل از کاربرد روش شبکه‌ی بولتزمن هم‌خوانی مناسبی با نتایج حاصل از کاربرد روش حجم محدود دارد (یادآور می‌شود که شکل نمایش داده شده، در اصل بزرگ شده‌ی شکل اصلی است). هم‌چنین محل گردابه‌ی تشکیل شده در پشت استوانه مطابق با نتایج حاصل از کاربرد روش حجم محدود است. در ادامه، با افزایش عدد رینولدز، تأثیر آن بر خطوط جریان بررسی شده است. همان‌طور که در شکل (۹) مشاهده می‌شود در Re=40 گردابه در پشت استوانه در مقایسه با Re=20 رشد کرده است، که این مطلب دور از انتظار نیست.

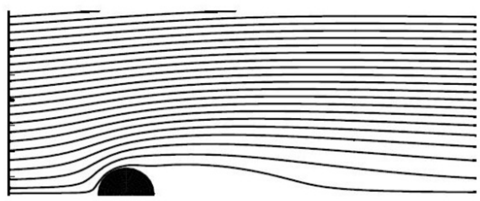


الف) روش شبکه‌ی بولتزمن



ب) حجم محدود

شکل ۸ مقایسه‌ی خطوط جریان حول استوانه‌ی آزاد برای Re=20 توسط روش‌های مختلف



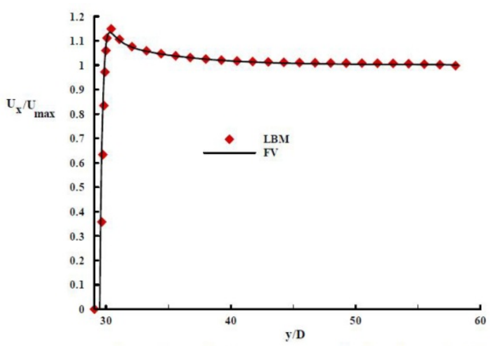
شکل۹ خطوط جریان حول استوانه‌ی آزاد برای Re=40

یکی دیگر از پارامترهـای مهـم در تحلیـل جریـان حول یک استوانه‌ی آزاد، طول گردابه‌ی تشکیل شده در پشت استوانه است که با افزایش عدد رینولدز افـزایش می‌یابد (طول گردابه از طریق رسم مؤلفه‌ی سـرعت در راستای افق در پشت استوانه و تغییـر علامـت سـرعت قابل محاسبه اسـت). بـرای مشـاهده‌ی افـزایش طـول گردابه با افزایش عدد رینولدز می‌تـوان بـه جـدول (۲) مراجعه کرد. در این جدول، طول گردابه‌ی تشکیل شده در پشت استوانه در Re=20 و Re=40 از طریـق روش شبکه‌ی بولتزمن در مقایسه با حل عددی [11] و روش حجم محدود نشان داده شده است. یادآور می‌شود کـه طول گردابه از سطح انتهایی استوانه سنجیده شده است و در نهایت بر اساس شعاع استوانه بدون بعـد گردیـده است. نتیجه‌ی به‌دست آمده، تطابق مناسبی با حل‌هـای عددی بیان شده نشان می‌دهد که نشان‌دهنده‌ی قـدرت روش شـبکه‌ی بـولتزمن در تحلیـل و شـبیه‌سـازی جریان‌های آزاد حول مرز خمیده است.

جدول ۲ طول گردابه‌ی پشت استوانه آزاد (بدون بعد)

روش	شبکه‌ی بولتزمن	حجم محدود	مرجع [11]
Re=20	۱/۹۵	۱/۹	۱/۸
Re=40	۴/۵	۴/۴	۴/۲

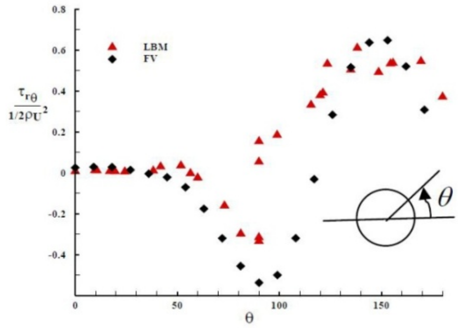
در شـکل (۱۰) مقایسـه‌ای بـین مؤلفـه‌ی افقـی سـرعت، در راسـتای خـط عمـودی گذرنـده از مرکـز استوانه توسط روش شـبکه‌ی بـولتزمن و روش حجـم محدود نشان داده شده است. همـان‌طـور کـه مشـاهده می‌شـود، سـرعت در قسـمت بـالای اسـتوانه بـه‌دلیـل نزدیکی خطوط جریان بـه یکـدیگر و افـت فشـار، بـه مقدار ماکزیمم می‌رسد و سپس به یک مقدار ثابت کـه برابر با سرعت یکنواخـت ورودی در مـرز بـالا اسـت دست مـی‌یابـد. نتـایج حاصـل حـاکی از دقـت روش شبکه‌ی بولتزمن و هم‌خوانی مناسب آن با نتـایج روش حجم محدود است.



شکل ۱۰ پروفیل مؤلفه‌ی افقی سرعت در راستای خط عمود از مرکز استوانه

در شکل (۱۱) برای نمایش هم‌خوانی مؤلفـه‌هـای تنش محاسبه‌شده بر سطح با نتایج روش حجم محدود

$\tau_{r\theta}$ حاصل از کاربرد روش شبکه‌ی بولتزمن در مقایسه با روش حجم محدود نشان داده شده است. برای محاسبه‌ی تنش سطح از رابطه‌ی (۱۸) استفاده شده است. شکل حاصل حاکی از هم‌خوانی نتایج حاصل با نتایج حاصل از کاربرد روش حجم محدود است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در هر دو روش صفر شدن تنش سطح، در یک نقطه بر روی استوانه نشان داده شده است. در واقع می‌توان محل شروع گردابه را در نقطه‌ای که تنش سطح صفر می‌شود به‌خوبی مشاهده کرد. در این قسمت نیز دقت و سادگی روش شبکه‌ی بولتزمن در محاسبه‌ی تنش سطح مشاهده می‌شود. بعد از محل صفر شدن تنش سطح، تفاوتی بین نتایج حاصل و نتایج روش حجم محدود مشاهده می‌شود که به‌دلیل یکسان نبودن مبنای محاسبه تنش برشی در دو روش است. هم‌چنین باید توجه داشت که هر دو روش، تنش برشی را در مختصات کارتزین محاسبه و سپس با استفاده از معادله‌ی (۱۸) به مختصات استوانه‌ای تبدیل می‌کنند که این مراحل باعث به‌وجود آمدن درصدی خطا در نتایج می‌شود. البته یادآور می‌شود که عمده تغییرات ضریب درگ به‌واسطه‌ی تغییرات فشار است و تنش برشی درصد ناچیزی از نیروی وارد بر استوانه را به خود اختصاص می‌دهد.



شکل ۱۱ تنش سطحی بر استوانه‌ی آزاد برای Re=20

نتیجه‌گیری

با توجه به نتایج حاصل، می‌توان نتیجه گرفت که روش شبکه‌ی بولتزمن برای شبیه‌سازی جریان‌های آزاد، از دقت مناسب و سادگی خاصی برخوردار است و شرط مرزی بوزیدی مرتبه‌ی ۲ برای اعمال مرز منحنی، بسیار دقیق عمل می‌کند. هم‌چنین مشاهده شد که از بین روش‌های محاسبه‌ی نیرو در روش شبکه‌ی بولتزمن، دقت روش تبادل ممنتم در عین سادگی، ستودنی است.

مراجع

1. Sukop, M.C. and Thorne, D.T., "*Lattice Boltzmann modeling*", Springer, (2006).
2. Kao, P.H. and Yang, R.J., "An investigation into curved and moving boundary treatments in the lattice Boltzmann method", *Journal of Computational Physics*, Vol. 227, pp. 5671-5690, (2008).
3. Dupuis, A., Chatelain, Ph. and Koumoutsakos, P., "An immersed boundary-lattice-Boltzmann method for the simulation of flow past an impulsively started cylinder",*Journal of Computational Physics*, Vol. 227, pp. 4486-4498, (2008).
٤. فرداد، عباسعلی، عاطفی، غلامعلی، محرم خانی، آیدین، "استفاده از روش لتیس بولتزمن جهت بررسی تغییرات عدد استروهال در اعداد رینولدز متفاوت و ریزش گردابه ای پیرامون استوانه مربعی داخل کانال"، نهمین کنفرانس انجمن هوافضای ایران، تهران، (۱۳۸۸).
٥. اشرفی زاده، محمود، پایمرد، سید محسن، "حل جریان سیال تراکم‌پذیر برروی اجسام با مرزهای منحنی به روش شبکه‌ی بولتزمن"، هشتمین همایش انجمن هوافضای ایران، اصفهان، (۱۳۸۷).

6. He, X. and Luo, L.S., "Theory of the lattice Boltzmann method: from the Boltzmann equation to the lattice Boltzmann equation", *Physical Review E*, Vol. 56, pp. 6811-6817, (1997).
7. Yu, D., Mei, R., Luo, L.Sh. and Shyy, W., "Viscous flow computations with the method of lattice Boltzmann equation", *Progress in Aerospace Sciences*, Vol. 39, pp. 329-367, (2003).
8. He, X. and Zou, Q., "Analysis and boundary condition of the lattice Boltzmann BGK model with two velocity components", *Journal of Statistical Physics*, Vol. 87, No.1, pp. 115-136, (1995).
9. Bouzidi, M., Firdaouss, M. and Lallemand, P., "Momentum transfer of Boltzmann-lattice fluid with boundaries", *Phys. Fluids*, Vol. 13, pp. 3452-3459, (2001).
10. White, F.M., "*Viscous fluid flow*", McGraw-Hill, New York, (1974).
11. Braza, M., Chassaing, P. and Minh, H.H., "Numerical Study and Physical Analysis of the Pressure and Velocity Fields in the Near Wake of a Circular Cylinder", *J. Fluid Mech*., Vol. 165, pp. 79-130, (1986).